

Propagação de Incertezas - Laboratório de Física (2009/1)

Universidade Federal do Espírito Santo - Centro de Ciências Agrárias
Departamento de Engenharia Rural
Professor : Roberto Colistete Júnior

1 Introdução

Ao medirmos diretamente algumas grandezas (que podem ser comprimento, temperatura, etc), incluindo as incertezas (os Δ 's das grandezas são considerados positivos) :

$$A = a \pm \Delta a, B = b \pm \Delta b, \text{ etc.}$$

frequentemente necessitamos calcular grandezas obtidas indiretamente (área, volume, etc) que dependem das grandezas medidas diretamente. Como tais medidas diretas apresentam incertezas, é fundamental saber como as incertezas se propagam ao calcularmos as grandezas indiretas.

Vejam os exemplo de multiplicação, onde P é uma grandeza indireta, A e B são grandezas diretas,

$$P = AB.$$

Nesse exemplo simples, podemos usar substituição direta para obter :

$$P = (a \pm \Delta a) (b \pm \Delta b) = ab \pm a \Delta b \pm b \Delta a \pm \Delta a \Delta b \simeq ab \pm (|a \Delta b| + |b \Delta a|),$$
$$P = p \pm \Delta p = ab \pm ab \left(\left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| \right),$$

onde desprezamos o termo $\Delta a \Delta b$ pois usualmente $\Delta a \ll |a|$ e $\Delta b \ll |b|$, e agrupamos os termos lineares em Δ 's usando módulos para obtermos uma incerteza $\Delta p = |a \Delta b| + |b \Delta a|$ garantidamente positiva.

2 Método de Derivadas para Propagação de Incertezas

Tal Δp pode ser obtido por outro método, usando diferenciais e derivadas, que se demonstra adequado para grandezas indiretas mais complexas de se calcular. Usando a definição de derivada da função f , em relação a uma variável muda (arbitrária) x :

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \simeq \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

sendo essa aproximação válida se Δx é muito pequeno. Ou seja, estamos aproximando os acréscimos Δf e Δx como sendo iguais aos diferenciais $df(x)$ e dx . Nesse contexto, podemos escrever :

$$\Delta f \simeq \frac{df(x)}{dx} \Delta x \simeq \frac{df(x)}{dx} dx = df(x).$$

2.1 Multiplicação

O exemplo da multiplicação $P = AB$ pode ser escrito usando funções para cada grandeza direta e indireta, i.e., $p(x) = a(x)b(x)$. Assim, usando a regra da derivada de um produto de funções :

$$\begin{aligned} dp(x) &= \frac{dp(x)}{dx} dx = \frac{d[a(x)b(x)]}{dx} dx = \left[\frac{da(x)}{dx} b(x) + a(x) \frac{db(x)}{dx} \right] dx, \\ dp(x) &= b(x) da(x) + a(x) db(x), \end{aligned}$$

a incerteza Δp é obtida aproximadamente (considerando $\Delta a \ll |a|$ e $\Delta b \ll |b|$) ao eliminarmos x e transformarmos os diferenciais em acréscimos (Δ 's) garantidamente positivos na expressão acima para $dp(x)$:

$$\Delta p \simeq dp(x) \Rightarrow \Delta p = |b \Delta a| + |a \Delta b| \Rightarrow p = a b \pm (|b \Delta a| + |a \Delta b|) = a b \pm a b \left(\left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| \right).$$

Verificamos que a incerteza relativa após um produto é igual a $\Delta p/p = |\Delta a/a| + |\Delta b/b|$, ou seja, é a soma das incertezas relativas das grandezas A e B .

2.2 Potenciação com Expoente Constante

Usando somente o método de diferenciais/derivadas para o cálculo de Δe da grandeza $E = e \pm \Delta e = B^\alpha$, onde α é uma constante real, traduzimos tal problema em termos de funções $e(x) = [b(x)]^\alpha = b^\alpha(x)$:

$$\begin{aligned} de(x) &= \frac{de(x)}{dx} dx = \frac{d[b^\alpha(x)]}{dx} dx = \left[\alpha b^{\alpha-1}(x) \frac{db(x)}{dx} \right] dx = \alpha b^{\alpha-1}(x) db(x), \\ \Delta e \simeq de(x) &\Rightarrow \Delta e = |\alpha b^{\alpha-1} \Delta b| \Rightarrow E = b^\alpha \pm |\alpha b^{\alpha-1} \Delta b| = b^\alpha \pm b^\alpha \left| \alpha \frac{\Delta b}{b} \right|. \end{aligned}$$

De onde concluímos que a incerteza relativa após uma potenciação é igual a $\Delta e/e = |\alpha \Delta b/b|$, ou seja, $|\alpha|$ vezes a incerteza relativa da grandeza B .

2.3 Exponenciação/Potenciação com Base Constante

Para o cálculo de Δf da grandeza $F = f \pm \Delta f = \exp B = e^B$, traduzimos tal problema em termos de funções $f(x) = \exp b(x) = e^{b(x)}$:

$$\begin{aligned} df(x) &= \frac{df(x)}{dx} dx = \frac{d[e^{b(x)}]}{dx} dx = \left[e^{b(x)} \frac{db(x)}{dx} \right] dx = e^{b(x)} db(x), \\ \Delta f \simeq df(x) &\Rightarrow \Delta f = |e^b \Delta b| \Rightarrow F = e^b \pm |e^b \Delta b| = e^b \pm e^b \left| b \frac{\Delta b}{b} \right|. \end{aligned}$$

De onde concluímos que a incerteza relativa após uma exponenciação é igual a $\Delta f/f = |b \Delta b/b|$, ou seja, $|b|$ vezes a incerteza relativa da grandeza B . Lembrar que para uma base genérica podemos usar $n^B = \exp(\ln n^B) = \exp(B \ln n) = \exp C$.

2.4 Logaritmo Natural e de Base Genérica

Para o cálculo de Δf da grandeza $F = f \pm \Delta f = \ln B$, traduzimos tal problema em termos de funções $f(x) = \ln b(x)$:

$$df(x) = \frac{df(x)}{dx} dx = \frac{d[\ln b(x)]}{dx} dx = \left[\frac{1}{b(x)} \frac{db(x)}{dx} \right] dx = \frac{1}{b(x)} db(x),$$

$$\Delta f \simeq df(x) \Rightarrow \Delta f = \left| \frac{1}{b} \Delta b \right| \Rightarrow F = \ln b \pm \left| \frac{\Delta b}{b} \right| = \ln b \pm \ln b \left| \frac{1}{\ln b} \frac{\Delta b}{b} \right|.$$

De onde concluímos que a incerteza relativa após uma exponenciação é igual a $\Delta f/f = |(\ln b)^{-1} \Delta b/b|$, ou seja, $|1/\ln b|$ vezes a incerteza relativa da grandeza B . Lembrar que $\ln B = \log_e B$ e que genericamente $\log_n B = [\ln B]/\ln n$.

2.5 Seno

Para o cálculo de Δf da grandeza $F = f \pm \Delta f = \sin \theta$, traduzimos tal problema em termos de funções $f(x) = \sin \theta(x)$:

$$df(x) = \frac{df(x)}{dx} dx = \frac{d[\sin \theta(x)]}{dx} dx = \left[\cos \theta(x) \frac{d\theta(x)}{dx} \right] dx = \cos \theta(x) d\theta(x),$$

$$\Delta f \simeq df(x) \Rightarrow \Delta f = |\cos \theta \Delta \theta| \Rightarrow F = \sin \theta \pm \left| \cos \theta \frac{\Delta \theta}{\theta} \right| = \sin \theta \pm \sin \theta \left| \cot \theta \frac{\Delta \theta}{\theta} \right|.$$

De onde concluímos que a incerteza relativa após um seno é igual a $\Delta f/f = |\cot \theta \Delta \theta/\theta|$, ou seja, $|\cot \theta|$ vezes a incerteza relativa da grandeza θ .

2.6 Cosseno

Para o cálculo de Δf da grandeza $F = f \pm \Delta f = \cos \theta$, traduzimos tal problema em termos de funções $f(x) = \cos \theta(x)$:

$$df(x) = \frac{df(x)}{dx} dx = \frac{d[\cos \theta(x)]}{dx} dx = \left[-\sin \theta(x) \frac{d\theta(x)}{dx} \right] dx = -\sin \theta(x) d\theta(x),$$

$$\Delta f \simeq df(x) \Rightarrow \Delta f = |\sin \theta \Delta \theta| \Rightarrow F = \cos \theta \pm \left| \sin \theta \frac{\Delta \theta}{\theta} \right| = \cos \theta \pm \cos \theta \left| \tan \theta \frac{\Delta \theta}{\theta} \right|.$$

De onde concluímos que a incerteza relativa após um cosseno é igual a $\Delta f/f = |\tan \theta \Delta \theta/\theta|$, ou seja, $|\tan \theta|$ vezes a incerteza relativa da grandeza θ .

3 Estabilidade Numérica

Várias relações matemáticas que são equivalentes deixam de o ser se há propagação de incertezas. Por exemplo :

$$F = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} = f \pm \Delta f \quad \Rightarrow \quad F = \left(\frac{1}{a} \pm \frac{1}{a} \left| \frac{\Delta a}{a} \right| \right) - \left(\frac{1}{b} \pm \frac{1}{b} \left| \frac{\Delta b}{b} \right| \right)$$

$$F = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \pm \left(\left| \frac{1}{a} \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{1}{b} \frac{\Delta b}{b} \right| \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \left| \frac{b}{b-a} \right| \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{a}{b-a} \right| \left| \frac{\Delta b}{b} \right|,$$

$$F = \frac{B - A}{AB} = (B - A)(AB)^{-1} = f \pm \Delta f$$

$$F = [b - a \pm (|\Delta a| + |\Delta b|)] \left[\frac{1}{ab} \pm \frac{1}{ab} \left(\left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| \right) \right]$$

$$F = \frac{b - a}{ab} \pm \frac{b - a}{ab} \left[\frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|b - a|} + \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right| \right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|b - a|} + \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|.$$

A diferença dos quadrados também não é equivalente ao produto da soma com a diferença :

$$F = A^2 - B^2 = f \pm \Delta f \quad \Rightarrow \quad F = \left(a^2 \pm a^2 \left| 2 \frac{\Delta a}{a} \right| \right) - \left(b^2 \pm b^2 \left| 2 \frac{\Delta b}{b} \right| \right)$$

$$F = (a^2 - b^2) \pm \left(\left| 2a^2 \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| 2b^2 \frac{\Delta b}{b} \right| \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \left| \frac{2a\Delta a}{a^2 - b^2} \right| + \left| \frac{2b\Delta b}{a^2 - b^2} \right|,$$

$$F = (A - B)(A + B) = f \pm \Delta f \quad \Rightarrow \quad F = [a - b \pm (|\Delta a| + |\Delta b|)] [a + b \pm (|\Delta a| + |\Delta b|)]$$

$$F = (a^2 - b^2) \pm (a^2 - b^2) \left(\frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|a - b|} + \frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|a + b|} \right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \left| \frac{\Delta a (|a + b| + |a - b|)}{a^2 - b^2} \right| + \left| \frac{\Delta b (|a + b| + |a - b|)}{a^2 - b^2} \right|.$$

Com exponencial de uma diferença, a propagação de incertezas não varia :

$$F = \exp(A - B) = f \pm \Delta f$$

$$F = \exp(a - b \pm |\Delta a + \Delta b|) = \exp(a - b) \pm \exp(a - b) |\Delta a + \Delta b| \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = |\Delta a + \Delta b|,$$

$$F = \frac{\exp(A)}{\exp(B)} = f \pm \Delta f$$

$$F = \frac{\exp(a) \pm \exp(a) |\Delta a|}{\exp(b) \pm \exp(b) |\Delta b|} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)} \pm \frac{\exp(a)}{\exp(b)} |\Delta a + \Delta b| \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = |\Delta a + \Delta b|.$$

Portanto tente rescrever a expressão da grandeza indireta F de tal forma que tenha a menor propagação de incertezas.