Propagação de Incertezas - Física Aplicada a Farmácia (2004/1)

Professor : Roberto Colistete Júnior

1 Introdução

Ao medirmos diretamente algumas grandezas (que podem ser comprimento, temperatura, etc), incluindo as incertezas (os Δ's das grandezas são considerados positivos) :

$$A = a \pm \Delta a,\ B = b \pm \Delta b,\ etc.$$

frequentemente necessitamos calcular grandezas obtidas indiretamente (área, volume, etc) que dependem das grandezas medidas diretamente. Como tais medidas diretas apresentam incertezas, é fundamental saber como as incertezas se propagam ao calcularmos as grandezas indiretas.

Vejamos o exemplo de multiplicação, onde P é uma grandeza indireta, A e B são grandezas diretas,

$$P = A\,B.$$

Nesse exemplo simples, podemos usar substituição direta para obter :

$$\begin{aligned} P &= (a \pm \Delta a)\,(b \pm \Delta b) = a\,b \pm a\,\Delta b \pm b\,\Delta a \pm \Delta a\,\Delta b \simeq a\,b \pm (|a\,\Delta b| + |b\,\Delta a|)\,, \\ P &= p \pm \Delta p = a\,b \pm a\,b\left(\left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right|\right), \end{aligned}$$

onde desprezamos o termo $\Delta a\,\Delta b$ pois usualmente $\Delta a \ll |a|$ e $\Delta b \ll |b|$, e agrupamos os termos lineares em Δ's usando módulos para obtermos uma incerteza $\Delta p = |a\,\Delta b| + |b\,\Delta a|$ garantidamente positiva.

2 Método de Derivadas para Propagação de Incertezas

Tal Δp pode ser obtido por outro método, usando diferenciais e derivadas, que se demonstra adequado para grandezas indiretas mais complexas de se calcular. Usando a definição de derivada da função f, em relação a uma variável muda (arbitrária) x :

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \simeq \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

sendo essa aproximação válida se Δx é muito pequeno. Ou seja, estamos aproximando os acréscimos Δf e Δx como sendo iguais aos diferenciais $d\,f(x)$ e $d\,x$. Nesse contexto, podemos escrever :

$$\Delta f \simeq \frac{d\,f(x)}{d\,x}\Delta x \simeq \frac{d\,f(x)}{d\,x}d\,x = d\,f(x).$$

2.1 Multiplicação

O exemplo da multiplicação $P = A\,B$ pode ser escrito usando funções para cada grandeza direta e indireta, i.e., $p(x) = a(x)\,b(x)$. Assim, usando a regra da derivada de um produto de funções :

$$\begin{aligned} d\,p(x) &= \frac{d\,p(x)}{d\,x}d\,x = \frac{d\,[a(x)\,b(x)]}{d\,x}d\,x = \left[\frac{d\,a(x)}{d\,x}\,b(x) + a(x)\frac{d\,b(x)}{d\,x}\right]d\,x, \\ d\,p(x) &= b(x)\,da(x) + a(x)\,db(x), \end{aligned}$$

a incerteza Δp é obtida aproximadamente (considerando $\Delta a \ll |a|$ e $\Delta b \ll |b|$) ao eliminarmos x e transformarmos os diferenciais em acréscimos (Δ's) garantidamente positivos na expressão acima para $d\,p(x)$:

$$\Delta p \simeq d\,p(x) \Rightarrow \Delta p = |b\,\Delta a| + |a\,\Delta b| \Rightarrow p = a\,b \pm (|b\,\Delta a| + |a\,\Delta b|) = a\,b \pm a\,b\left(\left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right|\right).$$

Verificamos que a incerteza relativa após um produto é igual a $\Delta p/p = |\Delta a/a| + |\Delta b/b|$, ou seja, é a soma das incertezas relativas das grandezas A e B.

2.2 Potenciação com Expoente Constante

Usando somente o método de diferenciais/derivadas para o cálculo de Δe da grandeza $E = e \pm \Delta e = B^\alpha$, onde α é uma constante real, traduzimos tal problema em termos de funções $e(x) = [b(x)]^\alpha = b^\alpha(x)$:

$$d\,e(x) = \frac{d\,e(x)}{d\,x}d\,x = \frac{d\,[b^\alpha(x)]}{d\,x}d\,x = \left[\alpha\,b^{\alpha-1}(x)\frac{d\,b(x)}{d\,x}\right]d\,x = \alpha\,b^{\alpha-1}(x)\,db(x),$$

$$\Delta e \simeq d\,e(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta e = \left|\alpha\,b^{\alpha-1}\Delta b\right| \quad \Rightarrow \quad E = b^\alpha \pm \left|\alpha\,b^{\alpha-1}\Delta b\right| = b^\alpha \pm b^\alpha\left|\alpha\frac{\Delta b}{b}\right|.$$

De onde concluímos que a incerteza relativa após uma potenciação é igual a $\Delta e/e = |\alpha\Delta b/b|$, ou seja, $|\alpha|$ vezes a incerteza relativa da grandeza B.

2.3 Exponenciação/Potenciação com Base Constante

Para o cálculo de Δf da grandeza $F = f \pm \Delta f = \exp B = e^B$, traduzimos tal problema em termos de funções $f(x) = \exp b(x) = e^{b(x)}$:

$$d\,f(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x}d\,x = \frac{d\,[e^{b(x)}]}{d\,x}d\,x = \left[e^{b(x)}\frac{d\,b(x)}{d\,x}\right]d\,x = e^{b(x)}\,db(x),$$

$$\Delta f \simeq d\,f(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \left|e^b\Delta b\right| \quad \Rightarrow \quad F = e^b \pm \left|e^b\,\Delta b\right| = e^b \pm e^b\left|b\frac{\Delta b}{b}\right|.$$

De onde concluímos que a incerteza relativa após uma exponenciação é igual a $\Delta f/f = |b\Delta b/b|$, ou seja, $|b|$ vezes a incerteza relativa da grandeza B. Lembrar que para uma base genérica podemos usar $n^B = \exp(\ln n^B) = \exp(B\ln n) = \exp C$.

2.4 Logaritmo Natural e de Base Genérica

Para o cálculo de Δf da grandeza $F = f \pm \Delta f = \ln B$, traduzimos tal problema em termos de funções $f(x) = \ln b(x)$:

$$d\,f(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x}d\,x = \frac{d\,[\ln b(x)]}{d\,x}d\,x = \left[\frac{1}{b(x)}\frac{d\,b(x)}{d\,x}\right]d\,x = \frac{1}{b(x)}\,db(x),$$

$$\Delta f \simeq d\,f(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \left|\frac{1}{b}\Delta b\right| \quad \Rightarrow \quad F = \ln b \pm \left|\frac{\Delta b}{b}\right| = \ln b \pm \ln b\left|\frac{1}{\ln b}\frac{\Delta b}{b}\right|.$$

De onde concluímos que a incerteza relativa após uma exponenciação é igual a $\Delta f/f = |(\ln b)^{-1}\Delta b/b|$, ou seja, $|1/\ln b|$ vezes a incerteza relativa da grandeza B. Lembrar que $\ln B = \log_e B$ e que genericamente $\log_n B = [\ln B]/\ln n$.

2.5 Seno

Para o cálculo de Δf da grandeza $F = f \pm \Delta f = \sin\theta$, traduzimos tal problema em termos de funções $f(x) = \sin\theta(x)$:

$$d\,f(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x}d\,x = \frac{d\,[\sin\theta(x)]}{d\,x}d\,x = \left[\cos\theta(x)\frac{d\,\theta(x)}{d\,x}\right]d\,x = \cos\theta(x)\,d\theta(x),$$

$$\Delta f \simeq d\,f(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = |\cos\theta\,\Delta\theta| \quad \Rightarrow \quad F = \sin\theta \pm \left|\theta\cos\theta\,\frac{\Delta\theta}{\theta}\right| = \sin\theta \pm \sin\theta\left|\theta\cot\theta\frac{\Delta\theta}{\theta}\right|.$$

De onde concluímos que a incerteza relativa após um seno é igual a $\Delta f/f = |\theta\cot\theta\Delta\theta/\theta|$, ou seja, $|\theta\cot\theta|$ vezes a incerteza relativa da grandeza θ.

2.6 Cosseno

Para o cálculo de Δf da grandeza $F = f \pm \Delta f = \cos\theta$, traduzimos tal problema em termos de funções $f(x) = \cos\theta(x)$:

$$d\,f(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x}d\,x = \frac{d\,[\cos\theta(x)]}{d\,x}d\,x = \left[-\sin\theta(x)\frac{d\,\theta(x)}{d\,x}\right]d\,x = -\sin\theta(x)\,d\theta(x),$$

$$\Delta f \simeq d\,f(x) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = |\sin\theta\,\Delta\theta| \quad \Rightarrow \quad F = \cos\theta \pm \left|\theta\sin\theta\,\frac{\Delta\theta}{\theta}\right| = \cos\theta \pm \cos\theta\left|\theta\tan\theta\frac{\Delta\theta}{\theta}\right|.$$

De onde concluímos que a incerteza relativa após um seno é igual a $\Delta f/f = |\theta\tan\theta\Delta\theta/\theta|$, ou seja, $|\theta\tan\theta|$ vezes a incerteza relativa da grandeza θ.

3 Estabilidade Numérica

Várias relações matemáticas que são equivalentes deixam de o ser se há propagação de incertezas. Por exemplo :

$$F = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} = f \pm \Delta f \quad \Rightarrow \quad F = \left(\frac{1}{a} \pm \frac{1}{a}\left|\frac{\Delta a}{a}\right|\right) - \left(\frac{1}{b} \pm \frac{1}{b}\left|\frac{\Delta b}{b}\right|\right)$$

$$F = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \pm \left(\left|\frac{1}{a}\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{1}{b}\frac{\Delta b}{b}\right|\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \left|\frac{b}{b-a}\right|\left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{a}{b-a}\right|\left|\frac{\Delta b}{b}\right|,$$

$$F = \frac{B-A}{A\,B} = (B-A)(A\,B)^{-1} = f \pm \Delta f$$

$$F = [b - a \pm (|\Delta a| + |\Delta b|)]\left[\frac{1}{ab} \pm \frac{1}{ab}\left(\left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right|\right)\right]$$

$$F = \frac{b-a}{a\,b} \pm \frac{b-a}{a\,b}\left[\frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|b-a|} + \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right|\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|b-a|} + \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right|.$$

A diferença dos quadrados também não é equivalente ao produto da soma com a diferença :

$$F = A^2 - B^2 = f \pm \Delta f \quad \Rightarrow \quad F = \left(a^2 \pm a^2\left|2\frac{\Delta a}{a}\right|\right) - \left(b^2 \pm b^2\left|2\frac{\Delta b}{b}\right|\right)$$

$$F = \left(a^2 - b^2\right) \pm \left(\left|2a^2\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|2b^2\frac{\Delta b}{b}\right|\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \left|\frac{2a\Delta a}{a^2-b^2}\right| + \left|\frac{2b\Delta b}{a^2-b^2}\right|,$$

$$F = (A-B)(A+B) = f \pm \Delta f \quad \Rightarrow \quad F = [a - b \pm (|\Delta a| + |\Delta b|)]\,[a + b \pm (|\Delta a| + |\Delta b|)]$$

$$F = \left(a^2 - b^2\right) \pm \left(a^2 - b^2\right)\left(\frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|a-b|} + \frac{|\Delta a| + |\Delta b|}{|a+b|}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \left|\frac{\Delta a\,(|a+b| + |a-b|)}{a^2-b^2}\right| + \left|\frac{\Delta b\,(|a+b| + |a-b|)}{a^2-b^2}\right|.$$

Com exponencial de uma diferença, a propagação de incertezas não varia :

$$F = \exp(A-B) = f \pm \Delta f$$

$$F = \exp\left(a - b \pm |\Delta a + \Delta b|\right) = \exp\left(a-b\right) \pm \exp\left(a-b\right)|\Delta a + \Delta b| \;\Rightarrow\; \frac{\Delta f}{f} = |\Delta a + \Delta b|\,,$$

$$F = \frac{\exp(A)}{\exp(B)} = f \pm \Delta f$$

$$F = \frac{\exp\left(a\right) \pm \exp\left(a\right)|\Delta a|}{\exp\left(b\right) \pm \exp\left(b\right)|\Delta b|} = \frac{\exp\left(a\right)}{\exp\left(b\right)} \pm \frac{\exp\left(a\right)}{\exp\left(b\right)}|\Delta a + \Delta b| \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = |\Delta a + \Delta b|\,.$$

Portanto tente rescrever a expressão da grandeza indireta F de tal forma que tenha a menor propagação de incertezas.