Solução da 3a Prova de Física IV - FIS 02719
07 de Dezembro de 2007 - 2007/02
Turma de Engenharia da Computação

■ Código de inicialização usando o software *Mathematica*

```
<< Utilities`Notation`

<< Miscellaneous`Units`

<<Miscellaneous`PhysicalConstants`

Off[General::spell]

Off[General::spell1]
```

1ª Questão

Capítulo 38 - Relatividade - Uma sonda não-tripulada "Vega-1" parte da Terra em direção à estrela Vega, que está a 26 anos-luz de distância. Tal nave espacial foi projetada para viajar a uma velocidade constante tal que a viagem de ida durasse 40 anos (no referencial da sonda), lá chegando, ficaria em órbita no sistema solar de Vega e não voltaria, somente enviando imagens e dados científicos via sinais de rádio (ondas eletromagnéticas) durante sua vida útil.
a) Qual a velocidade de "Vega-1" ? Quanto tempo terá passado na Terra quando tal sonda chegar na estrela Vega ?
Devido a uma rápida evolução tecnológica, 20 anos depois do envio de "Vega-1" foi decidido enviar uma sonda "irmã" chamada "Vega-2", com velocidade de cruzeiro de 0, 95 c, um quinto da massa de "Vega-1" e novos e melhorados experimentos científicos.
b) Qual o tempo de viagem de "Vega-2" visto na nave e na Terra ? Quem chegará primeiro, "Vega-1" ou "Vega-2" ? Qual a diferença de tempo ?
c) Qual a razão entre as energias usadas para mover "Vega-2" e "Vega-1" ?
Tal questão, de enviar uma nave espacial hoje é pior do que enviar uma mais moderna daqui a algumas décadas, é um argumento conservador para que não nos aventuremos enquanto a tecnologia de propulsão espacial e geração de energia não evoluir o suficiente.

Solução :

São dados :

$L_0 = 26$ anos-luz, $\Delta t_{01} = 40$ anos, $v_2 = 0,95\,c$,

■ Código de inicialização usando o software *Mathematica*

```
Symbolize[L₀]; Symbolize[Δt₀₁]; Symbolize[Δt₁]; Symbolize[Δt₀₂]; Symbolize[Δt₂];
Symbolize[v₁]; Symbolize[v₂]; Symbolize[γ₁]; Symbolize[γ₂];
```

Os valores para as constantes :

```
L₀ = 26 Year * c; Δt₀₁ = 40 Year; v₂ = 0.95 c;
```

a) O relógio de bordo da nave mede o tempo próprio, no caso 40 anos. O objetivo é percorrer uma distância de 26 anos-luz em 40 anos, porém deve-se observar que tal distância ficará contraída no referencial da nave :

$$L_1 = \frac{L_0}{\gamma_1},$$

sendo que γ é o fator de Lorentz entre os referenciais inerciais da nave e da Terra. O fator de Lorentz γ depende da velocidade v :

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}.$$

Como se quer calcular v, então usaremos a expressão da velocidade usando quantidades medidas no referencial da nave espacial :

$$v_1 = \frac{L_1}{\Delta t_{01}} = \frac{L_0}{\gamma_1\, \Delta t_{01}} = \frac{L_0}{\Delta t_{01}} \sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}.$$

Resolvendo em termos de v, temos :

$$v_1^2\, \Delta t_{01}^2 = L_0^2 - L_0^2\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 \;\Rightarrow\; v_1^2\left[\Delta t_{01}^2 + \left(\frac{L_0}{c}\right)^2\right] = L_0^2$$

$$v_1^2 = 1 \Big/ \left[\left(\frac{\Delta t_{01}}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2\right] \Rightarrow v_1 = c \Big/ \sqrt{1+\left(\frac{c\, \Delta t_{01}}{L_0}\right)^2}$$

Usando Δt_0 na "Vega-1" igual a Δt_{01}, L_0 sendo a distância até a estrela Vega e c a velocidade da luz, temos :

$$\mathbf{v_1 = c \Big/ \sqrt{1+\left(\frac{c * \Delta t_{01}}{L_0}\right)^2}}$$

$$\frac{13\, c}{\sqrt{569}}$$

$v_1 = 13\, c \big/ \sqrt{569} \simeq 0.544988\, c \simeq 1,63383 \times 10^8\, m/s$ como velocidade da nave "Vega-1" :

```
% // N
```

```
0.544988 c
```

```
% /. c → SpeedOfLight
```

$\frac{1.63383\times 10^{8}\ \text{Meter}}{\text{Second}}$

O tempo que terá passado na Terra é a distância até Vega (26 anos-luz) dividido pela velocidade da nave "Vega-1", calculada acima :

$$\Delta t_1 = \frac{L_0}{v_1},$$

ou, substituindo a expressão de v_1 temos o resultado em termos dos dados do enunciado, onde se vê que o tempo relativístico (Δt_1) é sempre maior que o tempo próprio da nave "Vega-1" ($\Delta t_0 = \Delta t_{01}$) :

$$\Delta t_1 = \frac{L_0}{c}\sqrt{1 + \left(\frac{c\,\Delta t_{01}}{L_0}\right)^2} = \sqrt{\Delta t_{01}{}^2 + \left(\frac{L_0}{c}\right)^2},$$

Ou seja, na Terra terá passado $2\sqrt{569}$ anos ou aprox. 47, 7074 anos :

$$\Delta t_1 = \sqrt{\Delta t_{01}{}^2 + \left(\frac{L_0}{c}\right)^2} \text{ // PowerExpand}$$

$2\sqrt{569}$ Year

```
% // N
```

47.7074 Year

b) No referencial da Terra, a distância é $L_0 = 26$anos-luz, logo o intervalo de tempo medido na Terra para a ida de "Vega-2", Δt_2, é simplesmente :

$$\Delta t_2 = \frac{L_0}{v_2},$$

onde $v_2 = 0,95\,c$ é a velocidade de "Vega-2". Numericamente, $\Delta t_2 \simeq 27,3684$ anos :

$$\Delta t_2 = \frac{L_0}{v_2}$$

27.3684 Year

O relógio de bordo da nave "Vega-2" mede o tempo próprio Δt_0, que deve ser calculado. A distância de 26 anos-luz ficará contraída no referencial da nave "Vega-2" :

$$L_2 = \frac{L_0}{\gamma} \,,$$

Como se quer calcular Δt_0, então usaremos a expressão da velocidade usando quantidades medidas no referencial da nave espacial :

$$v_2 = \frac{L_2}{\Delta t_{02}} \;\Rightarrow\; \Delta t_{02} = \frac{L_2}{v_2} = \frac{L_0}{\gamma_2\, v_2} \;\Rightarrow\; \Delta t_{02} = \frac{L_0}{v_2}\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2} \,.$$

numericamente, $\Delta t_{02} \simeq 8,\,54579$ anos é o tempo de viagem da nave "Vega-2" no referencial da mesma :

$$\Delta t_{02} = \frac{L_0}{v_2}\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}$$

```
8.54579 Year
```

Quem chegará primeiro ? "Vega-2" foi lançada 20 anos depois de "Vega-1", no referencial da Terra, então temos :

```
Δt2 + 20 Year < Δt1 // N
```

```
47.3684 Year < 47.7074 Year
```

Logo "Vega-2" chegará primeiro que "Vega-1". A diferença de tempo é pequena, 0, 339021 anos $\simeq$ 123, 743 dias :

```
Δt1 - (Δt2 + 20 Year) // N
```

```
0.339021 Year
```

```
Convert[%, Day]
```

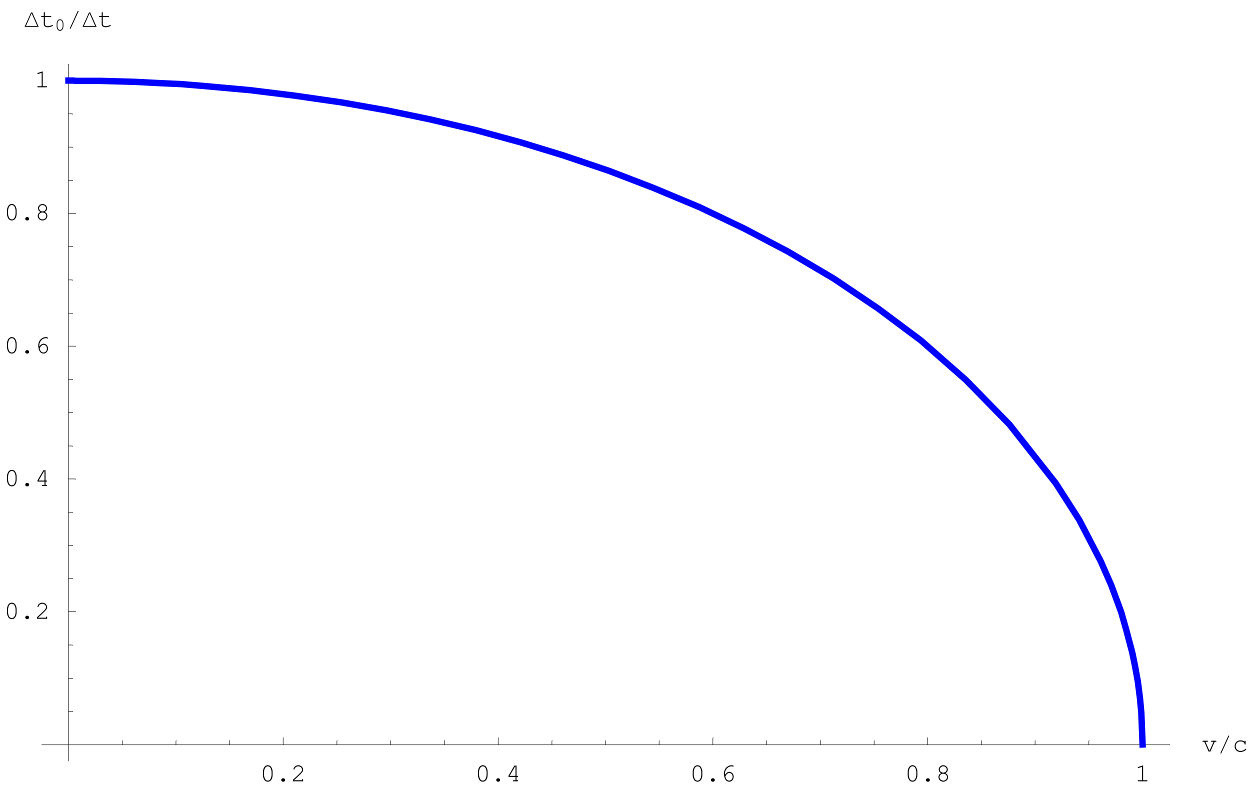
```
123.743 Day
```

■ Análise gráfica do tempo próprio $\Delta t_0 \times v$ (Material Opcional)

Vemos abaixo que o intervalo de tempo próprio (medido no referencial inercial que antes se acelerou para atingir a velocidade v) é sempre menor que o intervalo de tempo medido no referencial inercial externo (que sempre se manteve sem aceleração, i.e., inercial). Quando $v \to c$ temos que a razão entre intervalo de tempo próprio e intervalo de tempo tende a 0, $\Delta t_0 / \Delta t \to 0$. Mas somente objetos sem massa podem atingir a velocidade da luz c, como as ondas eletromagnéticas (ou fótons) e outros portadores de campos (grávitons, etc).

Dessa forma, podemos dizer que um fóton de luz que foi emitido por uma estrela a 1 bilhão de anos atrás (a uma distância de 1 bilhão de anos-luz) e chegou até nós na Terra, gastou um intervalo de tempo próprio igual Δt_0 a 0 segundos ! Embora no nosso referencial, Δt seja igual a 1 bilhão de anos !

```
Clear[vϕ]; Plot[√(1 - (vv)^2), {vv, 0, 1},
 TextStyle → {FontSize → 12}, AxesLabel → {"v/c", "Δt₀/Δt"},
 PlotStyle → {Thickness[0.006], RGBColor[0, 0, 1]}, PlotRange → All];
```



c) A razão das energias cinéticas relativísticas de cada é :

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{(\gamma_2 - 1)\, m_2\, c^2}{(\gamma_1 - 1)\, m_1\, c^2} = \frac{(\gamma_2 - 1)\, m_1 / 5}{(\gamma_1 - 1)\, m_1} = \frac{(\gamma_2 - 1)}{5\,(\gamma_1 - 1)},$$

Calculemos cada γ o mais exatamente possível em termos dos dados do enunciado :

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1 / c)^2}}, \text{ com } v_1 = c \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{c\,\Delta t_{01}}{L_0}\right)^2}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{c\,\Delta t_{01}}{L_0}\right)^2} \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{c\,\Delta t_{01}}{L_0}\right)^2 - 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{L_0}{c\,\Delta t_{01}}\right)^2}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}}\,, \text{ com } v_1 = 0,95\,c$$

Os valores de γ são $\gamma_1 = \sqrt{569}\,/\,20 \simeq 1,19269$ e $\gamma_2 \simeq 3,20256$:

$$\gamma_1 = \sqrt{1+\left(\frac{L_0}{c * \Delta t_{01}}\right)^2}$$

$$\frac{\sqrt{569}}{20}$$

```
% // N
```

```
1.19269
```

$$\gamma_2 = \left(1 \Big/ \sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}\right)$$

```
3.20256
```

Logo a razão das energias usadas para mover "Vega-2" e "Vega-1" é aprox. 2, 28617, i.e., "Vega-2" tem consume mais do que o dobro de energia de "Vega-1" apesar de ter 1 / 5 da massa de "Vega-1" (isso é pouca da velocidade de "Vega-2" ser bem superior).

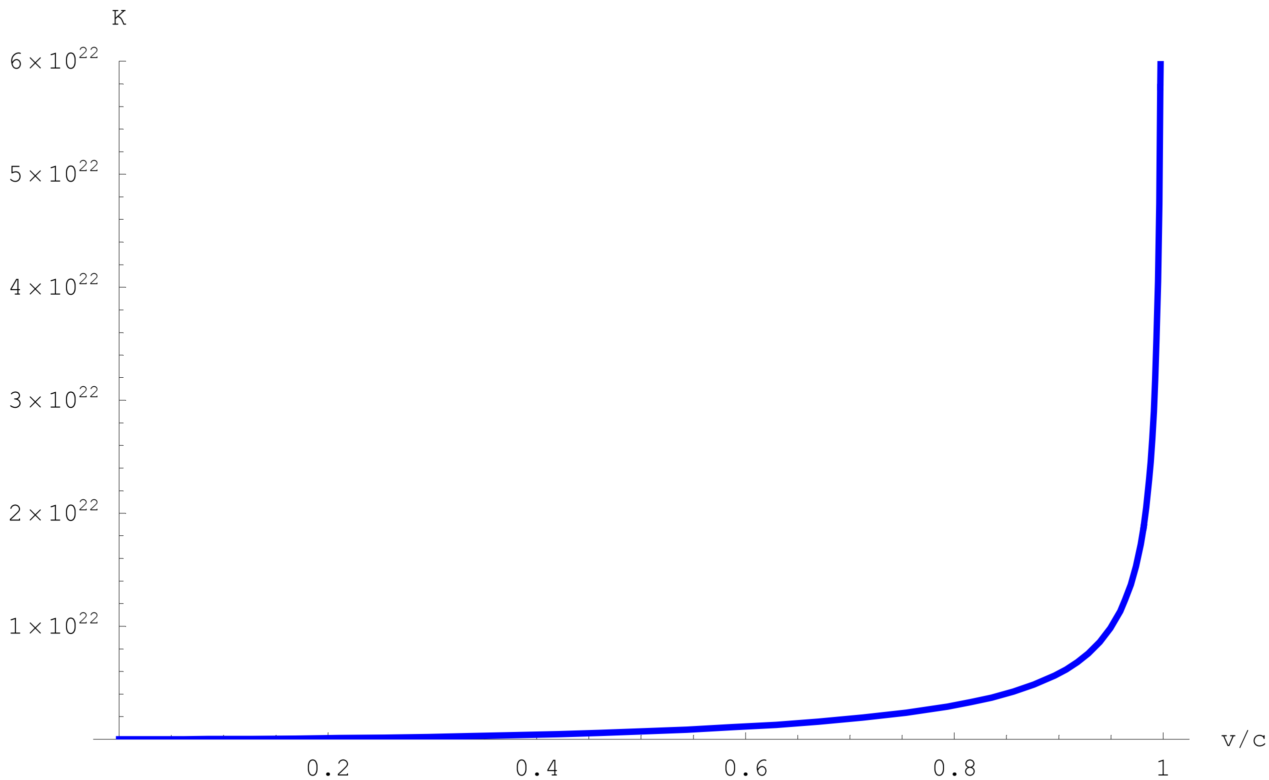
$$\frac{\gamma_2 - 1}{5\,(\gamma_1 - 1)}$$

```
2.28617
```

■ Análise gráfica do energia cinética $K \times v$ (Material Opcional)

Quando $v \to c$ vemos que a energia cinética diverge (i.e., tende a infinito), logo é impossível acelerar um objeto massivo (com massa não-nula) até a velocidade da luz c, pois isso exigiria uma energia cinética infinita.
Mas é sim possível obter velocidades muito próximas da velocidade da luz, o que é meramente uma questão tecnológica. Aqui vemos a energia cinética para uma nave espacial de 50 toneladas, em termos da velocidade v (em termos de c, que é uma barreira, i.e., assíntota vertical) :

```
Clear[vϕ]; Plot[Evaluate[(1/Sqrt[1 - (cv)^2] - 1) * m * c^2 /. {m → 50 * 10^3, c -> SpeedOfLight/(Meter / Second)}],
  {cv, 0, 0.9999999}, TextStyle → {FontSize → 12}, AxesLabel → {"v/c", "K"},
  PlotStyle → {Thickness[0.006], RGBColor[0, 0, 1]}, PlotRange → {0, 6 * 10^22}];
```



2^a Questão

Capítulo 38 - Relatividade, Problema 45P - Em uma colisão de alta energia entre uma partícula dos raios cósmicos e uma partícula da parte superior da atmosfera terrestre, 120 km acima do nível do mar, é criado um píon. O píon possui uma energia total de E de $1,35 \times 10^5$ MeV e está viajando verticalmente para baixo. No referencial de repouso do píon, o píon decai 35, 0 ns após ser criado. Em que altitude acima do nível do mar, do ponto de vista de um observador terrestre, ocorre este decaimento ? A energia de repouso do píon é 139, 6 MeV.

Solução :

São dados :

$h_0 = 120$ km, $E_t = 1,35 \times 10^5$ Mev, $\Delta t_0 = 35,0$ ns e $E_0 = 139,6$ Mev.

■ Código de inicialização usando o software *Mathematica*

```
Symbolize[h0]; Symbolize[Δt0]; Symbolize[Et]; Symbolize[E0];
```

Os valores para as constantes :

```
Symbolize[vh0]; Symbolize[vΔt0]; Symbolize[vEt]; Symbolize[vE0];

vh0 = 120 * 10^3 Meter; vEt = 1.35 * 10^5 MeV; vΔt0 = 35.0 * 10^-9 Second; vE0 = 139.6 MeV;
```

A altitude em que ocorre o decaimento pode ser obtida calculando a distância vertical d percorrida pelo píon no referencial da Terra :

$$d = v\,\Delta\mathrm{t}\,,$$

onde v é a velocidade do píon e Δt a duração da vida dele antes de decair, medida no referencial da Terra. Logo é necessário obter a velocidade v e o intervalo Δt. Esse último é dado pela dilatação temporal em relação ao intervalo de tempo próprio $\Delta\mathrm{t}_0$:

$$\Delta\mathrm{t} = \gamma\,\Delta\mathrm{t}_0\,,$$

sendo que γ é o fator de Lorentz entre os referenciais inerciais do píon e da Terra, e $\Delta\mathrm{t}_0$ é dado. Logo basta obter γ e v para calcular d, mas como γ e v são dependentes entre si :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,,$$

basta calcular um deles, por exemplo γ, para obter o outro.

A energia total relativística E_t, bem como a energia de repouso $E_0 = m\,c^2$, foram dadas. Como sabemos que :

$$E_t = \gamma\,m\,c^2 = \gamma\,E_0\,,$$

então γ é diretamente obtido e igual a aprox. 967, 049, um valor bem relativístico ($\gg 1$) :

```
vγ = vE_t / vE_0
```

967.049

tal que o intervalo Δt no referencial da Terra é aprox. 33.846, 7 ns, ou seja muito maior que o intervalo de tempo próprio $\Delta t_0 = 35,\ 0$ ns :

```
Δt == γ * Δt0 /. {γ → vγ, Δt0 → vΔt0}
```

Δt == 0.0000338467 Second

Para obter *v* em termos de γ, usamos a equação acima para γ :

$$\texttt{solv = Solve}\left[\gamma == \sqrt{\frac{1}{1-(v/c)^2}},\ v\right]$$

$$\left\{\left\{v \to -\frac{c\sqrt{-1+\gamma^2}}{\gamma}\right\}, \left\{v \to \frac{c\sqrt{-1+\gamma^2}}{\gamma}\right\}\right\}$$

Vemos que *v* é muito próximo de *c*, a velocidade da luz.

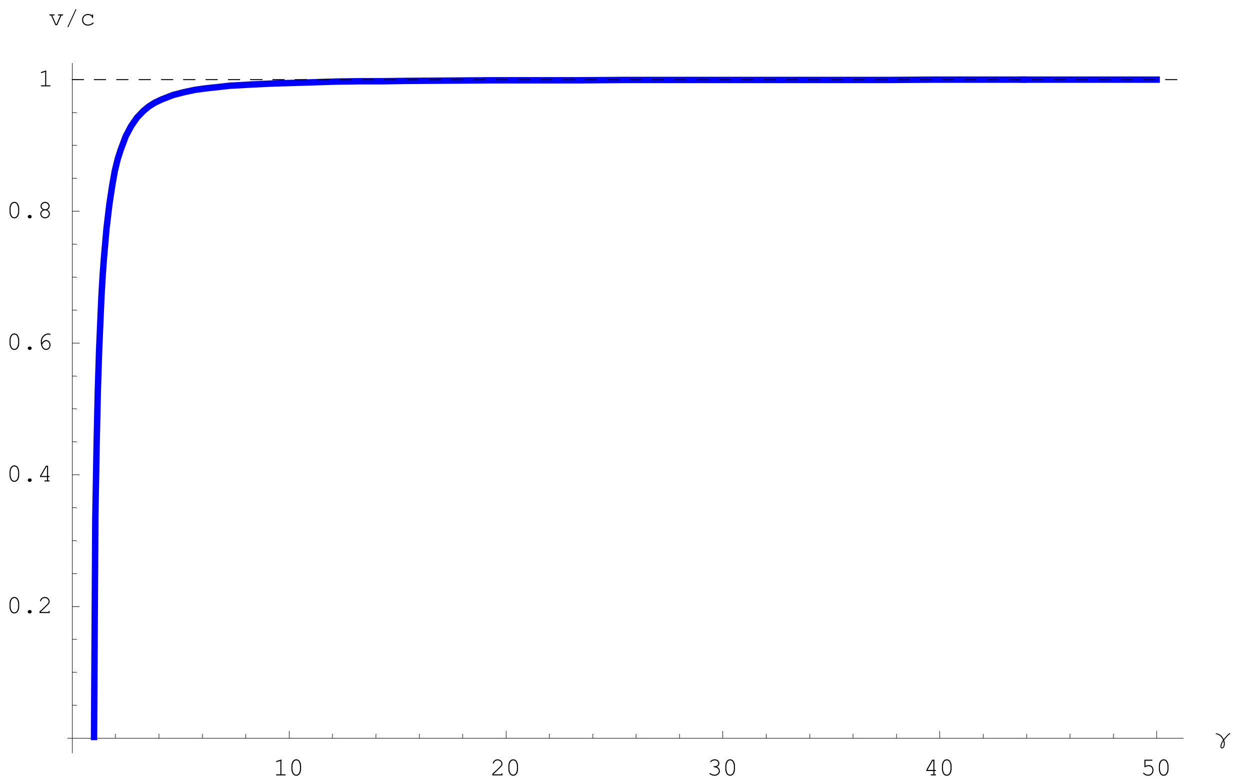
```
NumberForm[solv[[2]] /. γ → vγ, 15]
```

{v → 0.999999465345262 c}

■ Análise gráfica da velocidade em termos de fator de Lorentz, $v \times \gamma$ (Material Opcional)

A velocidade *v* se aproxima rapidamente da velocidade da luz *c* quando γ cresce, mas depois temos uma assíntota tal que *v* tende a *c* somente quando $\gamma \to \infty$:

```
Clear[vϕ]; Plot[Sqrt[-1 + γ^2]/γ, {γ, 1, 50}, TextStyle → {FontSize → 12},
 AxesLabel → {"γ", "v/c"}, PlotStyle → {Thickness[0.006], RGBColor[0, 0, 1]},
 PlotRange → All, Epilog → {Dashing[{0.01, 0.01}], Line[{{0., 1}, {1000., 1}}]}];
```



Usando tal resultado e a dilatação temporal na equação para d :

```
d == v * Δt /. {Δt → γ * Δt0, solv[[2, 1]]}
```

$d == c\sqrt{-1+\gamma^2}\,\Delta t_0$

O que em termos de E_t e E_0 fica :

$\% \;/.\; \gamma \to \frac{E_t}{E_0}$

$d == c\sqrt{-1+\frac{E_t^2}{E_0^2}}\,\Delta t_0$

$\% \;/.\; \gamma \to \frac{E_t}{E_0}$

$d == c\sqrt{-1+\frac{E_t^2}{E_0^2}}\,\Delta t_0$

Ou seja, a distância d em termos dos dados fornecidos é :

$$d = c\,\Delta t_0 \sqrt{\left(\frac{E_t}{E_0}\right)^2 - 1}\ ,$$

e numericamente, $d \simeq 10.147\ m$:

```
% /. {c → SpeedOfLight, E_t → vE_t, E_0 → vE_0, Δt_0 → vΔt_0}
```

```
d == 10147. Meter
```

Finalmente, a altura pedida é $h = h_0 - d$, ou simplesmente :

$$h = h_0 - c\,\Delta t_0 \sqrt{\left(\frac{E_t}{E_0}\right)^2 - 1}\ .$$

ou seja, $h \simeq 109,\ 853$ km :

```
vh_0 - %[[2]]
```

```
109853. Meter
```

3^a Questão

Capítulo 39 - Fótons e Ondas de Matéria, Problema 64P, extendido - A resolução de um microscópio depende do comprimento de onda usado; o menor objeto que pode ser resolvido tem dimensões da ordem do comprimento de onda. Suponha que estejamos interessados em "observar" o interior de um átomo. Como um átomo tem um diâmetro da ordem de 10 pm.
a) Se um microscópio eletrônico for usado para este fim, qual deverá ser, no mínimo, a energia dos elétrons ?
b) Se um microscópio óptico for usado, qual deverá ser, no mínimo, a energia dos fótons ?
c) Qual dos dois microscópios parece ser mais prático ? Por quê ?

Solução :

São dados (ou via tabelas) :

$d = 10\ \text{pm} = 10 \times 10^{-12}\ m$, $m_e = 9,\ 11 \times 10^{-31}$ kg.

■ Código de inicialização usando o software *Mathematica*

```
Symbolize[mₑ]; Symbolize[K_f];
```

Os valores para as constantes :

```
Symbolize[vmₑ]; Symbolize[vKₑ]; Symbolize[vK_f];
vd = 10 * 10^-12 Meter; vmₑ = 9.11 * 10^-31 Kilogram;
```

a) O comprimento de onda λ deve ser da ordem da dimensão $d = 10\,\text{pm}$, i.e., $\lambda = 10\,\text{pm}$. Logo para um microscópio eletrônico (que usa elétrons), o comprimento de onda de de Broglie deve ser tal λ. A energia cinética relativística K_e dos elétrons é obtida via a energia relativística total E_e e a energia relativística de repouso E_0 :

$$E_e = K_e + E_0 = K_e + m_e\,c^2 \ .$$

Tal energia E_e está relacionada com o comprimento de onda de de Broglie λ via o momento linear p :

$$p = \frac{h}{\lambda}\,,$$

sendo que a relação relativística entre E_e e p é dada por :

$$E_e^{\,2} = (p\,c)^2 + \left(m_e\,c^2\right)^2 .$$

Logo, podemos escrever K em termos de λ :

$$K_e =$$

$$E_e - m_e\,c^2 = \sqrt{(p\,c)^2 + \left(m_e\,c^2\right)^2} - m_e\,c^2 = \sqrt{\left(\frac{h\,c}{\lambda}\right)^2 + \left(m_e\,c^2\right)^2} - m_e\,c^2.$$

Substituindo numericamente as constantes e dados do problema, temos $K_e \simeq 2,\,37525\times10^{-15}\,J \simeq 14,\,8252\,\text{KeV}$:

```
vKe = (Sqrt[(h c/λ)^2 + (me c^2)^2] - me c^2 //. {h → PlanckConstant,
    c → SpeedOfLight, me → vme, λ → vd, Joule → Kilogram * Meter^2 / Second^2} //
  PowerExpand) /. Kilogram * Meter^2 / Second^2 -> Joule
```

2.37525×10^{-15} Joule

```
vKe = Convert[vKe, ElectronVolt]
```

14825.1 ElectronVolt

b) Para microscópio óptico, o comprimento de onda λ da onda eletromagnética deve ser da ordem da dimensão $d = 10\,\text{pm}$, i.e., $\lambda = 10\,\text{pm}$. A energia cinética relativística K_f dos fótons é igual à energia relativística total E_f pois os fótons têm massa nula (logo a energia relativística de repouso E_0 é nula) :

$$E_f = K_f + E_0 = K_f + 0\,J = K_f\,,$$

Tal energia E_f está relacionada com o comprimento de onda via a frequência $f = v/\lambda = c/\lambda$:

$$E_f = h\,f = \frac{h\,c}{\lambda}\,,$$

pois a velocidade v das ondas eletromagéticas (e dos fótons) é a velocidade da luz c. Portanto a energia cinética relativística K_f é simplesmente :

$$K_f = \frac{h\,c}{\lambda}\,.$$

O que numericamente resulta em $K_f \simeq 1,98645 \times 10^{-14}\,J \simeq 123,984\,\text{KeV}$:

```
vKf = h c/λ //. {h → PlanckConstant, c → SpeedOfLight, λ → vd}
```

1.98645×10^{-14} Joule

```
vKf = Convert[vKf, ElectronVolt]
```

123984. ElectronVolt

c) O microscópio eletrônico gasta aproximadamente 12 % da energia do microscópio óptico :

$$\frac{vK_e}{vK_f}$$

0.119573

logo o microscópio eletrônico é mais prático por gastar menos energia para ter a mesma capacidade de resolução.

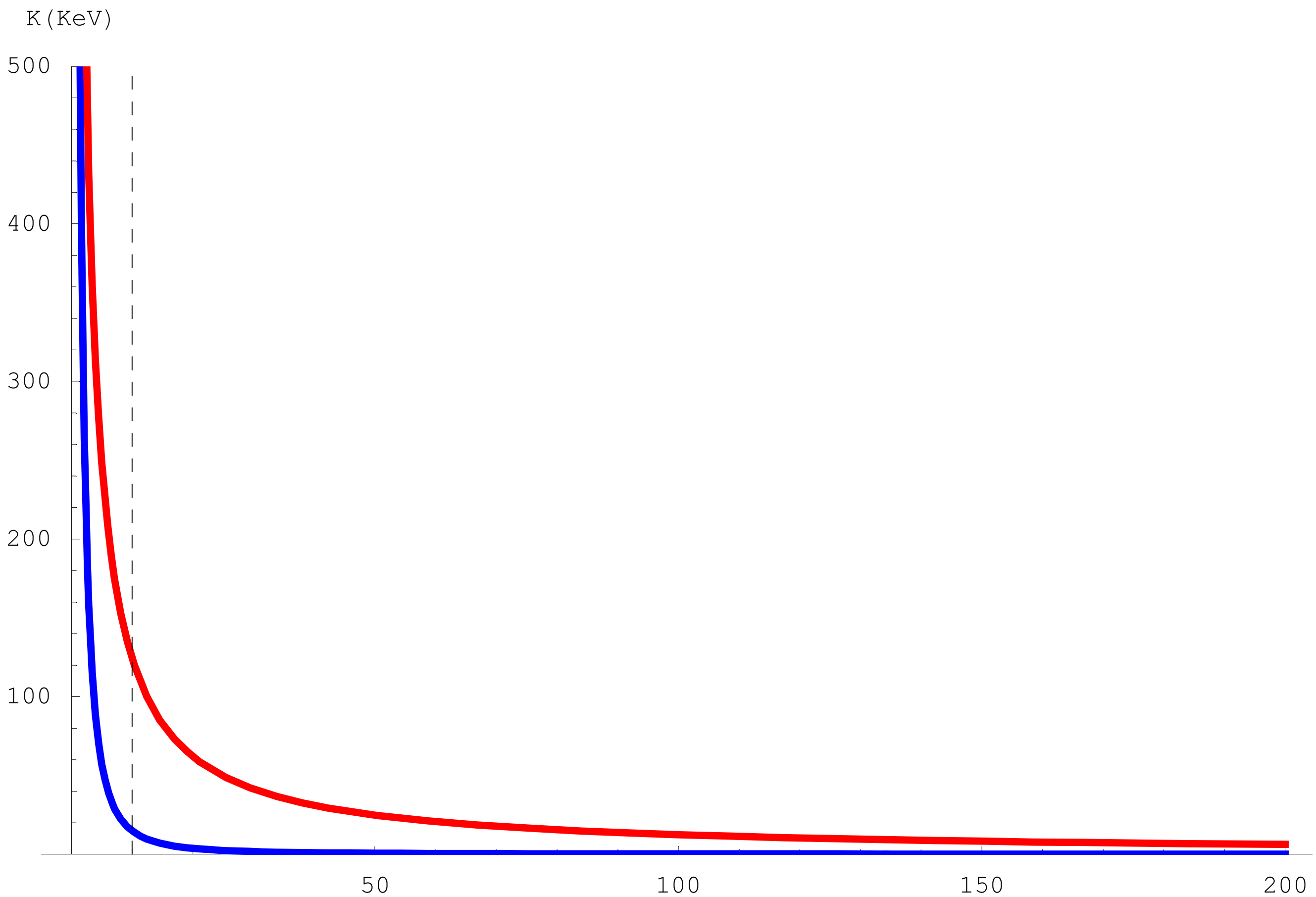
■ Análise gráfica da energia gasta com os dois microscópios em função do comprimento de onda, $K \times \lambda$ (Material Opcional)

Exibindo o gráfico das energias gastas com o microscópio eletrônico, K_e (linha azul), e o microscópio óptico, K_f (linha vermelha), em função do comprimento de onda λ, observa-se que tais energias crescem rapidamente quando $\lambda \to 0$ pm, com comportamento aproximadamente hiperbólico e exatamente hiperbólico, respectivamente.
No entanto, o gráfico abaixo não permite facilmente observar como se comporta a razão K_e / K_f.

$$\left\{\text{Convert}\left[\left(\sqrt{\left(\frac{h\,c}{\lambda}\right)^2 + (m_e\,c^2)^2} - m_e\,c^2 \;//.\; \{h \to \text{PlanckConstant},\ c \to \text{SpeedOfLight},\ m_e \to vm_e,\ \lambda \to c\lambda * 10^{-12}\ \text{Meter},\ \text{Joule} \to \text{Kilogram} * \text{Meter}^2 / \text{Second}^2\} \;//\; \text{Simplify} \;//\; \text{PowerExpand}\right) /.\ \text{Kilogram} * \text{Meter}^2 / \text{Second}^2 \text{ -> Joule},\ \text{ElectronVolt}\right],\ \text{Convert}\left[\frac{h\,c}{\lambda} \;//.\; \{h \to \text{PlanckConstant},\ c \to \text{SpeedOfLight},\ m_e \to vm_e,\ \lambda \to c\lambda * 10^{-12}\ \text{Meter}\},\ \text{ElectronVolt}\right]\right\}$$

$$\left\{6.24151 \times 10^{18} \left(-8.18766 \times 10^{-14} + \frac{\sqrt{3.94597 \times 10^{-26} + 6.70378 \times 10^{-27}\, c\lambda^2}}{c\lambda}\right) \text{ElectronVolt},\ \frac{1.23984 \times 10^6\ \text{ElectronVolt}}{c\lambda}\right\}$$

```
Plot[Evaluate[%/(10^3 ElectronVolt)], {cλ, 0, 200},
  TextStyle → {FontSize → 12}, AxesLabel → {"λ(pm)", "K(KeV)"}, PlotStyle →
   {{Thickness[0.006], RGBColor[0, 0, 1]}, {Thickness[0.006], RGBColor[1, 0, 0]}},
  PlotRange → {0, 500}, Epilog → {Dashing[{0.01, 0.01}], Line[{{10., 0.}, {10., 500.}}]}];
```

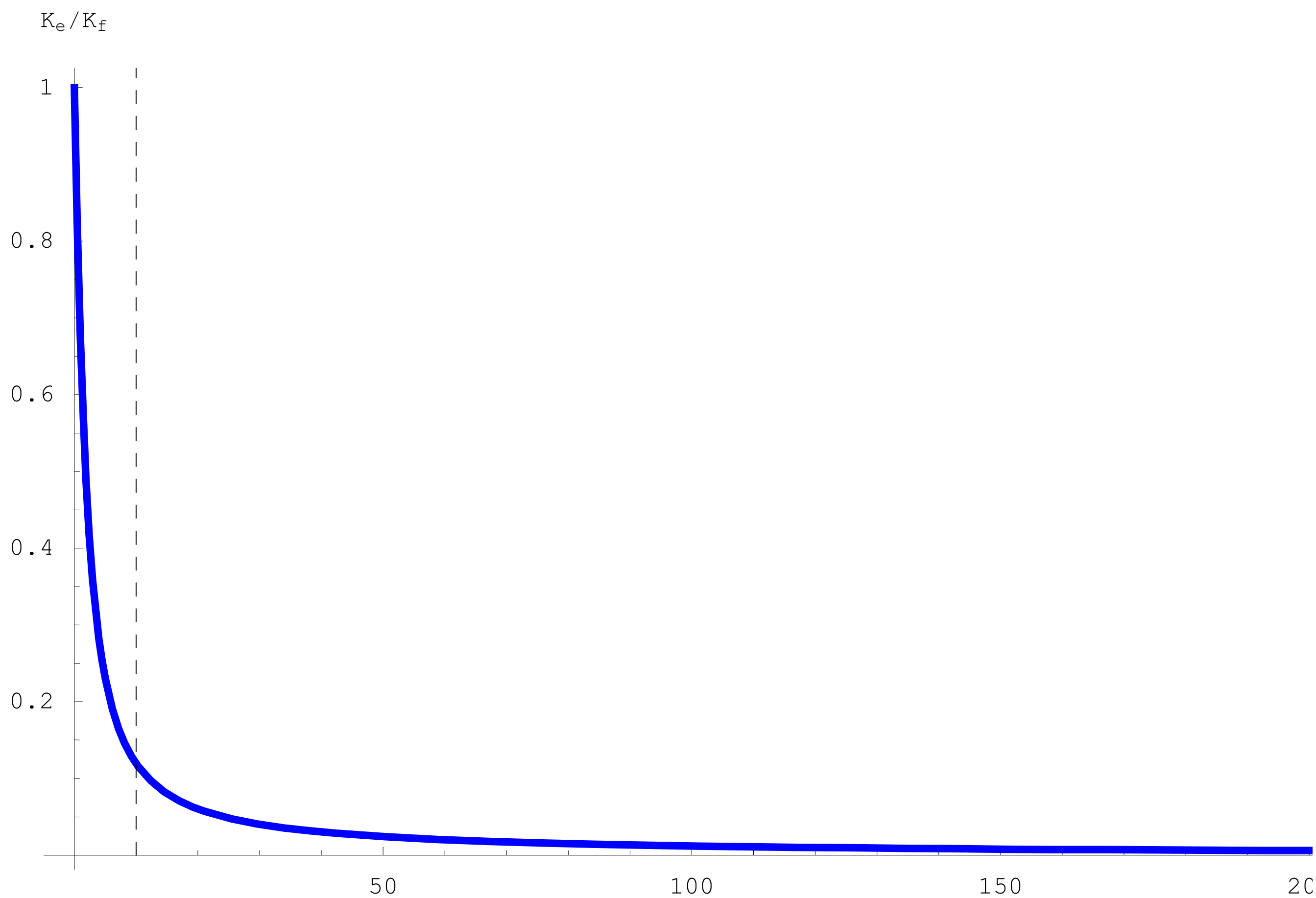


Analisando a razão K_e/K_f, vemos que o microscópio eletrônico sempre gasta menos energia que o óptico, e para grandes comprimentos de onda essa diferença é cada vez maior, e para $\lambda \to 0$ pm as energias se igualam.
O microscópio óptico é mais fácil de construir, porém quando λ fica muito pequeno ele consome muita energia, quando então a economia de energia do microscópio eletrônico compensa a maior complexidade de construção do mesmo.

```
%%[[1]]
-------
%%[[2]]
```

$$5.03412\times10^{12}\,c\lambda\left(-8.18766\times10^{-14}+\frac{\sqrt{3.94597\times10^{-26}+6.70378\times10^{-27}\,c\lambda^{2}}}{c\lambda}\right)$$

```
Plot[%, {cλ, 0, 200}, TextStyle → {FontSize → 12}, AxesLabel → {"λ(pm)", "Ke/Kf"},
  PlotStyle → {Thickness[0.006], RGBColor[0, 0, 1]}, PlotRange → All,
  Epilog → {Dashing[{0.01, 0.01}], Line[{{10., 0.}, {10., 500.}}]}];
```



4^a Questão

Capítulo 40 - Mais Ondas de Matéria, Problema 35E, extendido - Quais são :
a) a energia,
b) o módulo do momento (linear),
c) a frequência (com a classificação da mesma em termos de raios-X, gama, etc) e o comprimento de onda
do fóton emitido quando um átomo de hidrogênio sofre uma transição de um estado com $n = 3$ para um estado com $n = 1$? E se a transição for gradual, de estado com $n = 3$ para $n = 2$ e depois $n = 2$ para $n = 1$? Quais são os nomes das séries de transição para cada caso ?

Solução :

São dados :

$n_i = 3, n_f = 1.$

■ Código de inicialização usando o software *Mathematica*

```
Symbolize[mₑ]; Symbolize[ϵ0];

Symbolize[vEf31]; Symbolize[vEf32]; Symbolize[vEf21];
Symbolize[vpf31]; Symbolize[vpf32]; Symbolize[vpf21];
```

a) A energia de um estado do átomo de hidrogênio com nível n é dada por :

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8(\epsilon_0 h)^2}\frac{1}{n^2},$$

logo a diferença de energia entre os estados E_3 e E_1 é :

$$\Delta\text{E} = E_3 - E_1 = -\frac{m_e e^4}{8(\epsilon_0 h)^2}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2}\right) = \frac{m_e e^4}{9(\epsilon_0 h)^2},$$

e é liberada na forma de um fóton com a mesma energia, $E_f \simeq 1,93767\times 10^{-18}\, J \simeq 12,094\,\text{eV}$:

```
vEf31 = (me e^4)/(9 (ϵ0 h)^2) //. {me -> ElectronMass, e → ElectronCharge,
    ϵ0 -> VacuumPermittivity, h → PlanckConstant, Joule → (Kilogram * Meter^2 / Second^2),
    Ampere -> Coulomb / Second, Volt → Joule / Coulomb} /. Kilogram * Meter^2 / Second^2 -> Joule
```

1.93766×10^{-18} Joule

```
Convert[%, ElectronVolt]
```

12.0939 ElectronVolt

Entre os estados E_3 e E_2 :

$$\Delta\mathrm{E} = E_3 - E_2 = -\frac{m_e\, e^4}{8\,(\epsilon_0\, h)^2}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{5\, m_e\, e^4}{288\,(\epsilon_0\, h)^2}\ ,$$

e é liberada na forma de um fóton com a mesma energia, $E_f \simeq 3,0276\times10^{-19}\,J \simeq 1,88968\,\mathrm{eV}$:

```
vEf32 = (5 me e^4)/(288 (ϵ0 h)^2) //. {me -> ElectronMass, e → ElectronCharge,
    ϵ0 -> VacuumPermittivity, h → PlanckConstant, Joule → (Kilogram * Meter^2 / Second^2),
    Ampere -> Coulomb / Second, Volt → Joule / Coulomb} /. Kilogram * Meter^2 / Second^2 -> Joule
```

3.0276×10^{-19} Joule

```
Convert[%, ElectronVolt]
```

1.88968 ElectronVolt

Entre os estados E_2 e E_1 :

$$\Delta\mathrm{E} = E_2 - E_1 = -\frac{m_e\, e^4}{8\,(\epsilon_0\, h)^2}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = \frac{3\, m_e\, e^4}{32\,(\epsilon_0\, h)^2}\ ,$$

e é liberada na forma de um fóton com a mesma energia, $E_f \simeq 1,63491\times10^{-18}\,J \simeq 10,2043\,\mathrm{eV}$:

```
vEf21 = (3 me e^4)/(32 (ϵ0 h)^2) //. {me -> ElectronMass, e → ElectronCharge,
    ϵ0 -> VacuumPermittivity, h → PlanckConstant, Joule → (Kilogram * Meter^2 / Second^2),
    Ampere -> Coulomb / Second, Volt → Joule / Coulomb} /. Kilogram * Meter^2 / Second^2 -> Joule
```

1.6349×10^{-18} Joule

```
Convert[%, ElectronVolt]
```

```
10.2043 ElectronVolt
```

b) O momento linear p desse fóton em termos da energia relativística total E_f é simples de calcular, visto que a massa de repouso do fóton é nula :

$$E_f^{\,2} = (p_f\, c)^2 + (E_0)^2 = (p_f\, c)^2\,,$$

portanto :

$$p_f = \frac{E_f}{c}\ ,$$

o que numericamente resulta em $p_{31} \simeq 6,46336 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\, m/s$:

$$vp_{f31} = \frac{vE_{f31}}{c}\ /.\ \{c \to \mathrm{SpeedOfLight},\ \mathrm{Joule} \to (\mathrm{Kilogram} * \mathrm{Meter}^2 / \mathrm{Second}^2)\}$$

$$\frac{6.46335 \times 10^{-27}\ \mathrm{Kilogram\ Meter}}{\mathrm{Second}}$$

em $p_{32} \simeq 1,0099 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\, m/s$:

$$vp_{f32} = \frac{vE_{f32}}{c}\ /.\ \{c \to \mathrm{SpeedOfLight},\ \mathrm{Joule} \to (\mathrm{Kilogram} * \mathrm{Meter}^2 / \mathrm{Second}^2)\}$$

$$\frac{1.0099 \times 10^{-27}\ \mathrm{Kilogram\ Meter}}{\mathrm{Second}}$$

e em $p_{21} \simeq 5,45346 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\, m/s$:

$$vp_{f21} = \frac{vE_{f21}}{c}\ /.\ \{c \to \mathrm{SpeedOfLight},\ \mathrm{Joule} \to (\mathrm{Kilogram} * \mathrm{Meter}^2 / \mathrm{Second}^2)\}$$

$$\frac{5.45345 \times 10^{-27}\ \mathrm{Kilogram\ Meter}}{\mathrm{Second}}$$

c) O comprimento de onda λ está relacionado com o momento linear p via a relação de de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p}\,,$$

e a frequência f é simplesmente :

$$f = \frac{c}{\lambda},$$

o que resulta em $\lambda_{31} \simeq 102,518\,\text{nm}$ e $f \simeq 2,9243 \times 10^{15}$ Hz, que está na faixa do ultravioleta. Pertence à série de Lyman :

```
h / vp_f31 //. {h → PlanckConstant, Joule → (Kilogram * Meter^2 / Second^2)}
```

```
1.02518 × 10^-7 Meter
```

```
c / % /. c → SpeedOfLight
```

```
2.9243 × 10^15 / Second
```

$\lambda_{32} \simeq 656,112\,\text{nm}$ e $f \simeq 4,56922 \times 10^{14}$ Hz, está na faixa do vermelho e pertence à série de Balmer :

```
h / vp_f32 //. {h → PlanckConstant, Joule → (Kilogram * Meter^2 / Second^2)}
```

```
6.56112 × 10^-7 Meter
```

```
c / % /. c → SpeedOfLight
```

```
4.56922 × 10^14 / Second
```

$\lambda_{21} \simeq 121,502\,\text{nm}$ e $f \simeq 2,46738 \times 10^{15}$ Hz, que está na faixa do ultravioleta e pertence à série de Lyman :

```
h / vp_f21 //. {h → PlanckConstant, Joule → (Kilogram * Meter^2 / Second^2)}
```

```
1.21502 × 10^-7 Meter
```

```
c / % /. c → SpeedOfLight
```

```
2.46738 × 10^15 / Second
```